

# AdS/CFT -соответствие на примере 5-точечного конформного блока

Гейко Роман

ВШЭ, Факультет Математики, Лаборатория Теории Представлений и Математической Физики

18 июля 2017 г.

## Аннотация

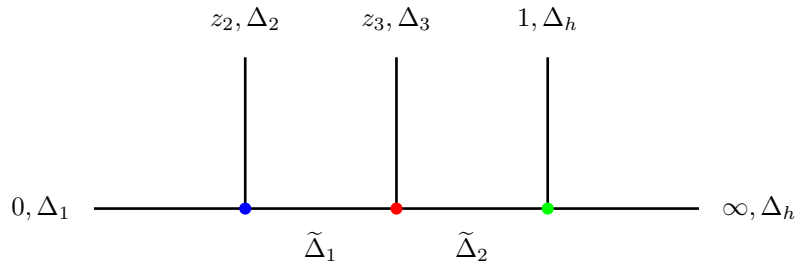
Работа посвящена развитию дуальной интерпретации двумерной конформной теории поля в терминах трёхмерной гравитации. В настоящее время в рамках  $AdS_3/CFT_2$ -соответствия установлена связь между четырёхточечными корреляторами в конформной теории поля на сфере и определёнными геодезическими конфигурациями в трёхмерной теории гравитации в квазиклассическом пределе. Специальный квазиклассический предел четырёхточечной корреляционной функции соответствует классическому действию частиц в  $AdS_3$  - пространстве с дефицитом угла [8][6]. Эта связь была распространена на корреляторы полей на торе[3], а также на пятиточечные корреляторы на сфере[1, 2, 4], однако в случае последних оставался вопрос о достаточной общности этого подхода. Имеются естественные ограничения на размерности внешних полей, именно, два внешних поля должны иметь равные размерности, чтобы в дуальной гравитации создавать так называемую БТЗ-сингулярность. Кроме естественных существовали ещё и ограничения на размерности промежуточных полей, физический смысл которых был неясен. В данной работе был предложен способ как избавиться от этого ограничения и тем самым восстановлено ясное дуальное описание пятиточечной корреляционной функции.

## 1 Пятиточечный конформный блок

Рассматривается двумерная конформная теория поля на сфере. Основной объект изучения в данной работе есть пятиточечный конформный блок, иначе, вклад определённого промежуточного канала в полную корреляционную функцию.

$AdS_3/CFT_2$ -соответствие предписывает равенство двух, на первый взгляд различных, объектов. С одной стороны имеется специальный квазиклассический предел конформного блока, а с другой стороны имеется классическое действие частиц, распространяющихся на фоне БТЗ-сингулярности. В этой картине два внешних поля в конформном блоке с равными размерностями являются в некотором смысле "тяжёлыми". Они лежат в центре  $AdS_3$ -пространства и создают сингулярность. В свою очередь, остальные внешние поля являются "лёгкими" и распространяются на фоне этой сингулярности.

Мы начинаем рассмотрение со стороны так называемой граничной конформной теории поля [5]. Пользуясь проективной инвариантностью мы можем разместить три внешних поля в 0, 1 и  $\infty$  для удобства, как показано на диаграмме ниже.



Мы раскладываем конформный блок по оставшимся двум проективным инвариантам:

$$F(\Delta_{1,2,3,4,5}, \tilde{\Delta}_{1,2}|q_1, q_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} F_{r,s} q_1^r q_2^s, \quad (1)$$

со следующими коэффициентами:

$$F_{r,s} = \sum_{r=|k|=|l|=0}^{\infty} \sum_{s=|m|=|n|=0}^{\infty} \mathcal{M}_{-k,l}^{-1}(\tilde{\Delta}_1) \mathcal{M}_{-m,n}^{-1}(\tilde{\Delta}_2) \langle \Delta_1 | \phi_2 \mathcal{L}_{-k} | \tilde{\Delta}_1 \rangle \times, \\ \langle \tilde{\Delta}_1 | \mathcal{L}_l \phi_3 \mathcal{L}_{-m} | \tilde{\Delta}_2 \rangle \langle \tilde{\Delta}_2 | \mathcal{L}_n \phi_h | \Delta_h \rangle, \quad (2)$$

На практике вычисление по этому определению быстро становится громоздким и используется  $c$ -рекурсия, то есть, полюсное разложение конформного блока [7].

Далее берётся классический предел

$$f_{cl}(\epsilon_{1,2,3}, \epsilon_h, \tilde{\epsilon}_{1,2}|q_1, q_2) = \\ - \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \log F(\Delta_{1,2,3} \rightarrow c\epsilon_{1,2,3}, \Delta_h \rightarrow \frac{c}{6}\epsilon_h, \tilde{\Delta}_{1,2} \rightarrow c\tilde{\epsilon}_{1,2}, c|q_1, q_2) \quad (3)$$

Его существование является удивительным свойством конформных блоков, называемом экспоненцированием. И далее мы учитываем факт того, что два внешних поля взаимодействуют сильно и раскладываем классический блок по их массам:

$$\epsilon_{1,2,3} \rightarrow \delta\epsilon_{1,2,3}, \quad \tilde{\epsilon}_{1,2} \rightarrow \delta\tilde{\epsilon}_{1,2}, \quad \epsilon_h \rightarrow \epsilon_h, \quad (4)$$

$$f_{cl} = \delta f_{hl} + O(\delta^2) \quad (5)$$

Полученный объекту- heavy-light блок  $f_{hl}$  можно сопоставить действие классической гравитации. Действительно, heavy-light блок зависит от "лёгких" размерностей не более чем линейно.

## 2 $AdS_3$ -гравитация

Здесь мы рассматриваем классическую теорию точечных гравитирующих частиц в фоновой  $AdS$ -подобной геометрии (более подробное изложение см. [1]). Имеются тройка координат  $(t, \rho, \phi)$  и следующий элемент длины:

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 \rho} \left( -dt^2 + \sin^2 \rho d\phi^2 + \frac{1}{\alpha^2} d\rho^2 \right), \quad (6)$$

Ввиду того, что угловая координата является циклической, угловой импульс в системе сохраняется. Далее введём удобное обозначение для углового импульса:

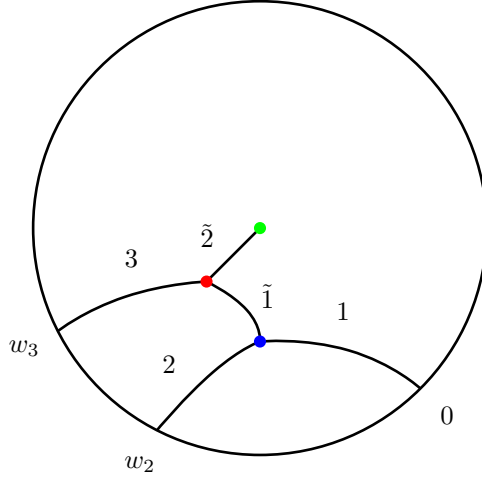
$$s = \frac{|p_\phi|}{\alpha}, \quad (7)$$

Длина траектории, вычисленная на геодезической имеет следующий вид:

$$\lambda = \ln \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{1+\eta} + \sqrt{1-s^2\eta}} \Bigg|_{\eta'}^{\eta''}, \quad (8)$$

где  $\eta = \cot^2 \rho$  и  $\eta_1$  и  $\eta_2$  относятся соответственно к началу и концу траектории.

Главное предположение нашей работы заключается в равенстве heavy-light блока и действия для соответствующей геодезической конфигурации (см. рис.)



Суммарная длина конфигурации должна быть минимизирована по положениям красной и синей вершин. Из условия экстремальности следуют уравнения на импульсы входящих в вершины линий, которые могут быть разрешены относительно положений вершин:

$$\tilde{s}_2 = 0, \quad \epsilon_3 s_3 - \tilde{\epsilon}_1 \tilde{s}_1 = 0, \quad \epsilon_1 s_1 - \epsilon_2 s_2 - \tilde{\epsilon}_1 \tilde{s}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\eta_B = \frac{1 - \sigma^2}{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \sigma}, \quad \sigma = \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \tilde{\epsilon}_1^2}{2\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad (10)$$

$$\eta_R = -\frac{(\epsilon_3 - \tilde{\epsilon}_1 - \tilde{\epsilon}_2)(\epsilon_3 + \tilde{\epsilon}_1 - \tilde{\epsilon}_1)(\epsilon_3 - \tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)(\epsilon_3 + \tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)}{4\epsilon_3^2 \tilde{\epsilon}_2^2 s_3^2}. \quad (11)$$

Уравнения (9)(10)(11) могут быть разрешены относительно  $s_1$  и  $s_3$ . Далее мы интегрируем угловую координату вдоль траекторий частиц и получаем связь между положением частиц на границе и константами интегрирования:

$$e^{i\alpha w_2} = \frac{(\sqrt{1 - s_1^2 \eta_B} - i s_1 \sqrt{1 + \eta_B})(\sqrt{1 - s_2^2 \eta_B} - i s_2 \sqrt{1 + \eta_B})}{(1 - i s_1)(1 - i s_2)}, \quad (12)$$

$$e^{i\alpha w_3} = \frac{(\sqrt{1 - s_3^2 \eta_R} - i s_3 \sqrt{1 + \eta_R})(\sqrt{1 - \tilde{s}_1^2 \eta_R} - i \tilde{s}_1 \sqrt{1 + \eta_R})(\sqrt{1 - s_1^2 \eta_B} - i s_1 \sqrt{1 + \eta_B})}{(1 - i s_3)(\sqrt{1 - \tilde{s}_1^2 \eta_B} - i \tilde{s}_1 \sqrt{1 + \eta_B})(1 - i s_1)}. \quad (13)$$

### 3 Теория возмущений

Основная цель работы-это разрешение угловых уравнений (12),(13) методом теории возмущений. Можно заметить, что если мы положим  $\epsilon_3 = 0$ , то решению угловых уравнений будет соответствовать действие для трёхлинейной геодезической конфигурации и четырёхточечный конформный блок.

Будем считать, что четырёхточечный блок соответствует решению угловых уравнений в нулевом приближении и будем строить возмущение над ним при помощи малого параметра  $\nu = \frac{\epsilon_3}{\tilde{\epsilon}_1}$ . Одно из таких решений было построено в предположениях, что  $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}_2$ , однако, в таком случае остаётся вопрос об общности полученного решения. Действительно, если мы будем вычислять  $\eta_B$  по теории возмущений, то сразу обнаружим член вида  $\frac{\tilde{\epsilon}_1^2 - \tilde{\epsilon}_2^2}{\nu^2}$ . Чтобы регуляризовать это слагаемое, мы положим разность внутренних размерностей пропорциональной параметру малости  $\nu$  и будем решать угловые уравнения в следующих предположениях:

$$\begin{cases} \nu = \frac{\epsilon_3}{\tilde{\epsilon}_1} \ll 1, \\ \tilde{\epsilon}_2 = \tilde{\epsilon}_1(1 + \nu\mu). \end{cases} \quad (14)$$

В результате мы получаем длину геодезической конфигурации следующего вида:

$$S = -2\epsilon_1 \log \sinh \left( \frac{\alpha}{2} \log(1 - q_1 q_2) \right) + \tilde{\epsilon}_1 \log \tanh \left( \frac{\alpha}{4} \log(1 - q_1 q_2) \right) \\ - \epsilon_3 \log \sinh \left( \alpha \frac{2 \log(1 - q_2) - \log(1 - q_1 q_2)}{2} \right) + \epsilon_3 \mu \log \tanh \left( \alpha \frac{2 \log(1 - q_2) - \log(1 - q_1 q_2)}{4} \right) \quad (15)$$

Главный результат этой работы состоит в проверке следующего равенства:

$$f_{hl} = -S + \epsilon_3 \log \left( -\frac{\alpha q_2}{1 - q_2} \right) + \epsilon_3 \mu \log \left( -\frac{\alpha q_2}{2} \right) + \tilde{\epsilon}_1 \log \left( -\frac{\alpha q_1 q_2}{4} \right) - 2\epsilon_1 \log \left( -\frac{\alpha q_1 q_2}{2} \right) \\ + \epsilon_1 \log(1 - q_1 q_2), \quad (16)$$

в правой части которого находится классическое действие  $-S$  и слагаемые, обусловленные поведением конформного блока при конформном отображении на плоскость.

В этой работе мы разрешили вопрос, связанный с дуальным описанием 5-точечного heavy-light блока. В предыдущих работах было вычислено классическое действие, соответствующее конфигурации с двумя равными промежуточными размерностями, и в связи с этим стоял вопрос о принципиальной возможности голографического описания heavy-light блоков с различными промежуточными размерностями. Мы предложили способ, как использовать теорию возмущений в интересующем случае различных размерностей и получили действие, согласованное с вычислением в граничной конформной теории поля. Таким образом была восстановлена корректная дуальная интерпретация конформных блоков и показано, что нет нефизических ограничений на размерности полей в блоках, допускающих дуальное описание.

## Список литературы

- [1] K. B. Alkalaev and V. A. Belavin. Classical conformal blocks via AdS/CFT correspondence. *JHEP*, 08:049, 2015.
- [2] K. B. Alkalaev and V. A. Belavin. From global to heavy-light: 5-point conformal blocks. *JHEP*, 03:184, 2016.
- [3] K. B. Alkalaev and V. A. Belavin. Holographic interpretation of 1-point toroidal block in the semiclassical limit. *JHEP*, 06:183, 2016.
- [4] Konstantin B. Alkalaev and V. A. Belavin. Monodromic vs geodesic computation of Virasoro classical conformal blocks. *Nucl. Phys.*, B904:367–385, 2016.
- [5] A.A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory. *Nucl.Phys.*, B241:333–380, 1984.
- [6] Mert Besken, Ashwin Hegde, Eliot Hijano, and Per Kraus. Holographic conformal blocks from interacting Wilson lines. *JHEP*, 08:099, 2016.
- [7] Minjae Cho, Scott Collier, and Xi Yin. Recursive Representations of Arbitrary Virasoro Conformal Blocks. 2017.
- [8] Eliot Hijano, Per Kraus, Eric Perlmutter, and River Snively. Semiclassical Virasoro blocks from AdS<sub>3</sub> gravity. *JHEP*, 12:077, 2015.