

Отношение бегущих и полюсных масс
тяжелых кварков в КХД и теоретическое
значение массы t -кварка

В. С. Молокоедов
А. Л. Катаев

МФТИ (ГУ)
ИЯИ РАН

Долгопрудный
18-19 апреля 2016

План

- Полюсная масса тяжёлых кварков
- Бегущая масса кварков в $\overline{\text{MS}}$ -схеме
- Отношение бегущих и полюсных масс тяжёлых кварков
- Нахождение коэффициентов для n_l и n_l^0 -флейворной зависимости в $z_m^{(4)}$ -члене при помощи метода наименьших квадратов
- Ренормгрупповой анализ
- Вычисление полюсных масс c, b и t -кварков в $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ приближении
- Выводы

Полюсная масса тяжёлых кварков

Полный пропагатор кварков имеет следующий вид:

$$-i\hat{S}(k) = \frac{i}{\hat{k} - m_{0,q} - \Sigma(\hat{k}, m_{0,q})}$$

где $\Sigma(\hat{k}, m_{0,q})$ обозначает одночастично-неприводимый оператор собственной энергии кварка q , а $m_{0,q}$ неперенормированная "голая" масса этого кварка. Полюсная масса тяжёлого кварка определяется из условия равенства нулю инверсионного кваркового пропагатора при фиксированном внешнем импульсе на массовой поверхности:

$$(\hat{k} - m_{0,q} - \Sigma(\hat{k}, m_{0,q})) \Big|_{k^2=M_q^2} = 0$$

Отсюда можно получить связь "голой" и полюсной массы


$$m_{0,q} = Z_m^{\text{OS}} M_q$$

Бегущая масса кварков

Бегущая масса кварков в $\overline{\text{MS}}$ -схеме определяется при помощи ренормгрупповой β -функции и аномальной размерности массы, которые определяются посредством разложений по константе связи КХД и вычисляются по теории возмущений ($a_s = \alpha_s/\pi$):

$$\beta(\alpha_s) = \mu^2 \frac{\partial(\alpha_s(\mu^2)/\pi)}{\partial\mu^2} = - \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^{i+2},$$
$$\gamma_m(\alpha_s) = \mu^2 \frac{\partial \ln(\overline{m}_q(\mu^2))}{\partial\mu^2} = - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^{i+1}$$

Решением уравнений ренормгруппы для бегущей массы кварков будет выражение вида

$$\frac{\overline{m}_q(\tilde{\mu}^2)}{\overline{m}_q(\mu^2)} = \exp \left(\int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(\tilde{\mu}^2)} \frac{\gamma_m(x) dx}{\beta(x)} \right)$$


Бегущая масса кварков

Аналогично, связь "голой" и бегущей массы может быть записана в следующем виде

$$m_{0,q} = Z_m^{\overline{\text{MS}}} \overline{m}_q(\mu)$$

Ренормализационный массовый фактор $Z_m^{\overline{\text{MS}}}$, возникающий благодаря ультрафиолетовым расходимостям по параметру ε ($D = 4 - 2\varepsilon$), вычисляется по теории возмущений и может быть представлен в виде ряда по степеням константы связи:

$$Z_m^{\overline{\text{MS}}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i \frac{z_{ij}(n_l^{i-1})}{\varepsilon^j} a_s^i$$

где n_l - это количество лёгких флейворов, $n_f = n_l + 1$, а обозначение (n_l^{i-1}) подразумевает максимальную степень n_l , от которой зависит функция z_{ij} .

Отношение бегущих и полюсных масс тяжёлых кварков

Благодаря тому факту, что перенормированные величины \overline{m}_q и M_q конечны, отношение бегущей массы кварков в \overline{MS} -схеме к полюсной массе тяжёлых кварков будет также конечной величиной и может быть представлено в следующем виде:

$$z_m(\mu) = \frac{\overline{m}_q(\mu)}{M_q} = \frac{Z_m^{\text{OS}}}{Z_m^{\overline{MS}}}$$

Для того чтобы перейти в этом выражении к одной константе связи в \overline{MS} -схеме, нужно воспользоваться разложением "голой" константы связи α_0 через перенормированную

$$a_0 = \mu^{2\varepsilon} a_s \left(1 - \frac{\beta_0}{\varepsilon} a_s + \left(\frac{\beta_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{\beta_1}{2\varepsilon} \right) a_s^2 - \left(\frac{\beta_0^3}{\varepsilon^3} - \frac{7\beta_1\beta_0}{6\varepsilon^2} + \frac{\beta_2}{3\varepsilon} \right) a_s^3 \right)$$

Отношение бегущих и полюсных масс тяжёлых кварков

В итоге $z_m(\mu)$ -отношение может быть записано в виде ряда по константе связи сильного взаимодействия в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$z_m(\mu) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} z_m^{(i)} a_s^i(\mu)$$

Более того, коэффициенты разложения $z_m^{(i)}$ могут быть представлены в виде полиномов $(i-1)$ -степени от n_l :

$$z_m^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} z_m^{(i,j)} n_l^j$$

Отношение бегущих и полюсных масс тяжёлых кварков

Коэффициенты разложения $z_m^{(i)}$ для $1 \leq i \leq 3$ посчитаны аналитически для группы цветовой симметрии $SU(N_c)$ и их численные значения в случае $SU(3)$ -группы (тогда операторы Казимира равны $C_F = 4/3$, $C_A = 3$, где $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$, $(t^a t^a)_{ij} = C_F \delta_{ij}$, $f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}$, $\text{Tr}(t^a t^b) = \delta^{ab}/2$) будут выглядеть следующим образом при $\mu^2 = M_q^2$:

$$z_m^{(1)} = -\frac{4}{3}, \quad z_m^{(2)} = -14.3323 + 1.04136n_l,$$
$$z_m^{(3)} = -198.706 + 26.9239n_l - 0.65269n_l^2$$

Аналитический вид коэффициентов $z_m^{(i)}$ содержит $\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$

и $\text{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k k^{-n}$ -члены, где $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 5$, $x = 1/2$.

$z_m^{(4)}$ -коэффициент

Отдельно рассмотрим кубический по n_l $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ член:

$$z_m^{(4)} = z_m^{(40)} + z_m^{(41)}n_l + z_m^{(42)}n_l^2 + z_m^{(43)}n_l^3$$

В этом выражении два последних члена известны в аналитическом виде (Р. Ли, П. Маркуард, А. В. Смирнов, В. А. Смирнов, М. Штайнхаузер, 2013), а первые два пока ещё остаются неизвестными:

$$z_m^{(4)} = z_m^{(40)} + z_m^{(41)}n_l - 43.4824n_l^2 + 0.67814n_l^3$$

Найдём их численно при помощи метода наименьших квадратов и недавно полученных при помощи программы FIESTA численных результатов для коэффициента $z_m^{(4)}$ при фиксированном значении n_l (П. Маркуард, А. В. Смирнов, В. А. Смирнов, М. Штайнхаузер, 2015)

$z_m^{(4)}$ -коэффициент

$$z_m^{(4)}(M_q^2) \Big|_{n_l=3} = -1744.8 \pm 21.5, \quad z_m^{(4)}(M_q^2) \Big|_{n_l=4} = -1267.0 \pm 21.5,$$
$$z_m^{(4)}(M_q^2) \Big|_{n_l=5} = -859.96 \pm 21.5$$

Здесь погрешность $\sigma=21.5$ появляется при вычислении 332 четырёхпетлевых интегралов в схеме на массовой поверхности. Заметим, что данная погрешность не зависит от количества лёгких флейворов, поэтому она почти полностью определяется ошибкой константного члена $z_m^{(40)}(M_q^2)$, который определяется при вычислении четырёхпетлевых диаграмм Фейнмана без внутренних фермионных петель в глюонном пропагаторе, в то время как ошибкой члена $z_m^{(41)}(M_q^2)$ можно пренебречь.

Нахождение коэффициентов для n_l и n_l^0 -флейворной зависимости в $z_m^{(4)}$ -члене

Используя формулы, приведённые выше, мы получаем следующую переопределённую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}z_m^{(40)} + 3z_m^{(41)} &= -1371.77, \\z_m^{(40)} + 4z_m^{(41)} &= -614.68, \\z_m^{(40)} + 5z_m^{(41)} &= 142.32.\end{aligned}$$

Для решения этой системы мы используем метод наименьших квадратов. Для этого вводим функцию, равную сумме квадратов отклонений $\Delta_{l_k} = z_m^{(40)} + z_m^{(41)}n_{l_k} - y_{l_k}$, где индекс k нумерует номер уравнения, а y_{l_k} обозначает правую часть уравнений данной системы:

$$\Phi(z_m^{(40)}, z_m^{(41)}) = \sum_{k=1}^3 \Delta_k^2 = \sum_{k=1}^3 (z_m^{(40)} + z_m^{(41)}n_{l_k} - y_{l_k})^2$$

Нахождение коэффициентов для n_l и n_l^0 -флейворной зависимости в $z_m^{(4)}$ -члене

Мы полагаем решением данной системы такие $(z_m^{(40)}, z_m^{(41)})$ для которых $\Phi(z_m^{(40)}, z_m^{(41)})$ будет принимать наименьшее значение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_m^{(40)}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_m^{(41)}} = 0.$$

с ошибками данного метода $\Delta y_{l_k} \equiv \Delta y_l = \sigma$ для всех $k=1-3$:

$$\Delta z_m^{(40)} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial z_m^{(40)}}{\partial y_{l_k}} \Delta y_{l_k} \right)^2} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^3 n_{l_k}^2} \Delta y_l}{\sqrt{3 \sum_{k=1}^3 n_{l_k}^2 - \left(\sum_{k=1}^3 n_{l_k} \right)^2}}$$

$$\Delta z_m^{(41)} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial z_m^{(41)}}{\partial y_{l_k}} \Delta y_{l_k} \right)^2} = \frac{\sqrt{3} \Delta y_l}{\sqrt{3 \sum_{k=1}^3 n_{l_k}^2 - \left(\sum_{k=1}^3 n_{l_k} \right)^2}}$$

Значения коэффициентов для n_l и n_l^0 -флейворной зависимости в $z_m^{(4)}$ -члене

Таким образом, мы получаем следующий результат

$$z_m^{(40)}(M_q^2) = -3642.9 \pm 62.0, \quad z_m^{(41)}(M_q^2) = 757.05 \pm 15.20.$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_q(M_q^2) \approx & M_q(1 - 1.33333a_s(M_q^2) + (1.0414n_l - 14.332)a_s^2(M_q^2) + \\ & + (-0.6527n_l^2 + 26.924n_l - 198.71)a_s^3(M_q^2) + \\ & + (0.6781n_l^3 - 43.482n_l^2 + (757.05 \pm 15.20)n_l - 3642.9 \pm 62.0)a_s^4(M_q^2)) \end{aligned}$$

Применение метода ренормгруппы

$$a_s(M_q^2) = \bar{a}_s(1 + c_1\bar{a}_s + c_2\bar{a}_s^2 + c_3\bar{a}_s^3 + c_4\bar{a}_s^4) ,$$

$$-\ln\left(\frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)}\right) = \int_{\bar{a}(\bar{m}_q^2)}^{a(M_q^2)} \frac{dx}{\beta_0 x^2 + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^4 + \beta_3 x^5} ,$$

$$c_1 = -\beta_0 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} , \quad c_2 = \beta_0^2 \ln^2 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} - \beta_1 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} ,$$

$$c_3 = -\beta_0^3 \ln^3 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} + \frac{5}{2}\beta_0\beta_1 \ln^2 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} - \beta_2 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} ,$$

$$c_4 = \beta_0^4 \ln^4 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} - \frac{13}{3}\beta_1\beta_0^2 \ln^3 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} +$$

$$+ \frac{3}{2}(\beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2) \ln^2 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} - \beta_3 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)}$$

Применение метода ренормгруппы

$$\bar{m}_q(M_q^2) = \bar{m}_q(\bar{m}_q^2)(1 + b_1\bar{a}_s + b_2\bar{a}_s^2 + b_3\bar{a}_s^3 + b_4\bar{a}_s^4)$$

Аналогично рассматривая решение уравнений ренормгруппы для бегущих масс кварков, находим, что коэффициенты b_i имеют следующий вид:

$$b_1 = -\gamma_0 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)}, \quad b_2 = \frac{1}{2}\gamma_0(\gamma_0 + \beta_0) \ln^2 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} - \gamma_1 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)},$$
$$b_3 = -\frac{1}{3}\gamma_0(\beta_0 + \gamma_0)(\beta_0 + \gamma_0/2) \ln^3 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} +$$
$$+\frac{1}{2}(\beta_1\gamma_0 + 2\gamma_1(\beta_0 + \gamma_0)) \ln^2 \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)} - \gamma_2 \ln \frac{M_q^2}{\bar{m}_q^2(\bar{m}_q^2)}.$$

Подставляя полученные результаты в представление полюсной массы через бегущую, нормированную на полюсной массе, и сравнивая это выражение с разложением

$$M_q = \bar{m}_q(\bar{m}_q^2)(1 + l_1\bar{a}_s + l_2\bar{a}_s^2 + l_3\bar{a}_s^3 + l_4\bar{a}_s^4)$$

получаем следующий результат

$$l_1 = \frac{4}{3}, \quad l_2 = 13.4433 - 1.04136n_l,$$

$$l_3 = 190.595 - 26.6551n_l + 0.65269n_l^2,$$

$$l_4 = -86.54 - z_m^{(40)} + (11.221 - z_m^{(41)})n_l + 43.3962n_l^2 - 0.67814n_l^3.$$

Знакопостоянная асимптотическая структура

$$\begin{aligned}M_c &\approx \bar{m}_c(\bar{m}_c^2)(1 + 1.3333a_s(\bar{m}_c^2) + 10.318a_s^2(\bar{m}_c^2) + \\ &\quad + 116.49a_s^3(\bar{m}_c^2) + (1691.1 \pm 76.9)a_s^4(\bar{m}_c^2)), \\ M_b &\approx \bar{m}_b(\bar{m}_b^2)(1 + 1.3333a_s(\bar{m}_b^2) + 9.277a_s^2(\bar{m}_b^2) + \\ &\quad + 94.41a_s^3(\bar{m}_b^2) + (1224.0 \pm 86.8)a_s^4(\bar{m}_b^2)), \\ M_t &\approx \bar{m}_t(\bar{m}_t^2)(1 + 1.3333a_s(\bar{m}_t^2) + 8.236a_s^2(\bar{m}_t^2) + \\ &\quad + 73.63a_s^3(\bar{m}_t^2) + (827.3 \pm 98.0)a_s^4(\bar{m}_t^2))\end{aligned}$$

Данные выражения демонстрируют асимптотическую структуру рядов теории возмущений. В самом деле, эти соотношения содержат знакопостоянные и значительно растущие коэффициенты в разложениях по константе связи.

Численные значения бегущих масс

Для получения окончательных численных результатов, мы используем следующие значения бегущих масс, которые могут быть найдены с хорошей точностью из экспериментальных сведений о массах J/ψ и Υ :

$$\begin{aligned}\overline{m}_c(\overline{m}_c^2) &= 1.275 \text{ GeV} , & \overline{m}_b(\overline{m}_b^2) &= 4.180 \text{ GeV} , \\ \overline{m}_t(\overline{m}_t^2) &= 163.643 \text{ GeV}\end{aligned}$$

Мы берём $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=4)} = 215 \text{ MeV}$, которое следует из среднего мирового значения $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1185$. Для самосогласованности результатов, мы используем трансформационные формулы для получения значений $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=3)}$ и $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=5)}$:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=3)} = 297 \text{ MeV} , \quad \Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=5)} = 91 \text{ MeV}$$

N³LO разложение константы связи

Далее мы используем N³LO разложение константы связи по логарифмам $L = \ln(\overline{m}_q^2(\overline{m}_q^2)/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_f)^2})$

$$a_s^{\text{NLO}} = \frac{1}{\beta_0 L} - \frac{\beta_1 \ln(L)}{\beta_0^3 L^2},$$

$$a_s^{\text{NNLO}} = a_s^{\text{NLO}} + \Delta a_s^{\text{NNLO}},$$

$$\Delta a_s^{\text{NNLO}} = \frac{1}{\beta_0^5 L^3} (\beta_1^2 \ln^2(L) - \beta_1^2 \ln(L) + \beta_2 \beta_0 - \beta_1^2),$$

$$a_s^{\text{N}^3\text{LO}} = a_s^{\text{NNLO}} + \Delta a_s^{\text{N}^3\text{LO}},$$

$$\Delta a_s^{\text{N}^3\text{LO}} = \frac{1}{\beta_0^7 L^4} \left[\beta_1^3 \left(-\ln^3(L) + \frac{5}{2} \ln^2(L) + 2 \ln(L) - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - 3\beta_0 \beta_1 \beta_2 \ln(L) + \beta_0^2 \frac{\beta_3}{2} \right]$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=3)} = 297\text{MeV}, \quad \alpha_s^{\text{N}^3\text{LO}}(\overline{m}_c^2) = 0.3993,$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=4)} = 215\text{MeV}, \quad \alpha_s^{\text{N}^3\text{LO}}(\overline{m}_b^2) = 0.2271,$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=5)} = 91\text{MeV}, \quad \alpha_s^{\text{N}^3\text{LO}}(\overline{m}_t^2) = 0.1087.$$

$$\overline{m}_c(\overline{m}_c^2) = 1.275 \text{ GeV}, \quad \overline{m}_b(\overline{m}_b^2) = 4.180 \text{ GeV},$$

$$\overline{m}_t(\overline{m}_t^2) = 163.643 \text{ GeV}$$

Окончательный результат

$$\frac{M_c}{1 \text{ GeV}} \approx 1.275 + 0.216 + 0.213 + 0.305 + 0.563 \pm 0.026 ,$$
$$\frac{M_b}{1 \text{ GeV}} \approx 4.180 + 0.403 + 0.202 + 0.149 + 0.140 \pm 0.010 =$$
$$= 5.074 \pm 0.010$$

Из этих выражений видно, что в случае c -кварка, асимптотическая природа рядов проявляется, начиная с третьего порядка ТВ, а для b -кварка – с четвёртого. Поэтому для феноменологических применений следует использовать понятие бегущей массы для c -кварка, а для b -кварка предпочтительнее использовать бегущую массу нежели полюсную.

Окончательный результат

$$\begin{aligned}\frac{M_t}{1 \text{ GeV}} &\approx 163.643 + 7.549 + 1.613 + 0.499 + 0.194 \pm 0.023 = \\ &= 173.498 \pm 0.023\end{aligned}$$

В случае t -кварка теоретико-возмущенческие вклады уменьшаются с ростом порядка теории возмущений. Поэтому для t -кварка одинаково справедливо использовать как бегущие, так и полюсные массы. Фиксированные при помощи МНК теоретические ошибки оказываются в 3-4 раза больше, чем численные ошибки, возникающие при вычислении $z_m^{(4)}$ при фиксированном n_l , но по-прежнему в разы меньше, чем измеренные экспериментальные погрешности:

$$M_t^{exp} \approx 173.21 \pm 0.87 \text{ GeV}$$

Данный вопрос может быть решён при строительстве нового линейного e^+e^- коллайдера и дальнейшем аналитическом расчёте КХД поправок.

Спасибо за внимание!